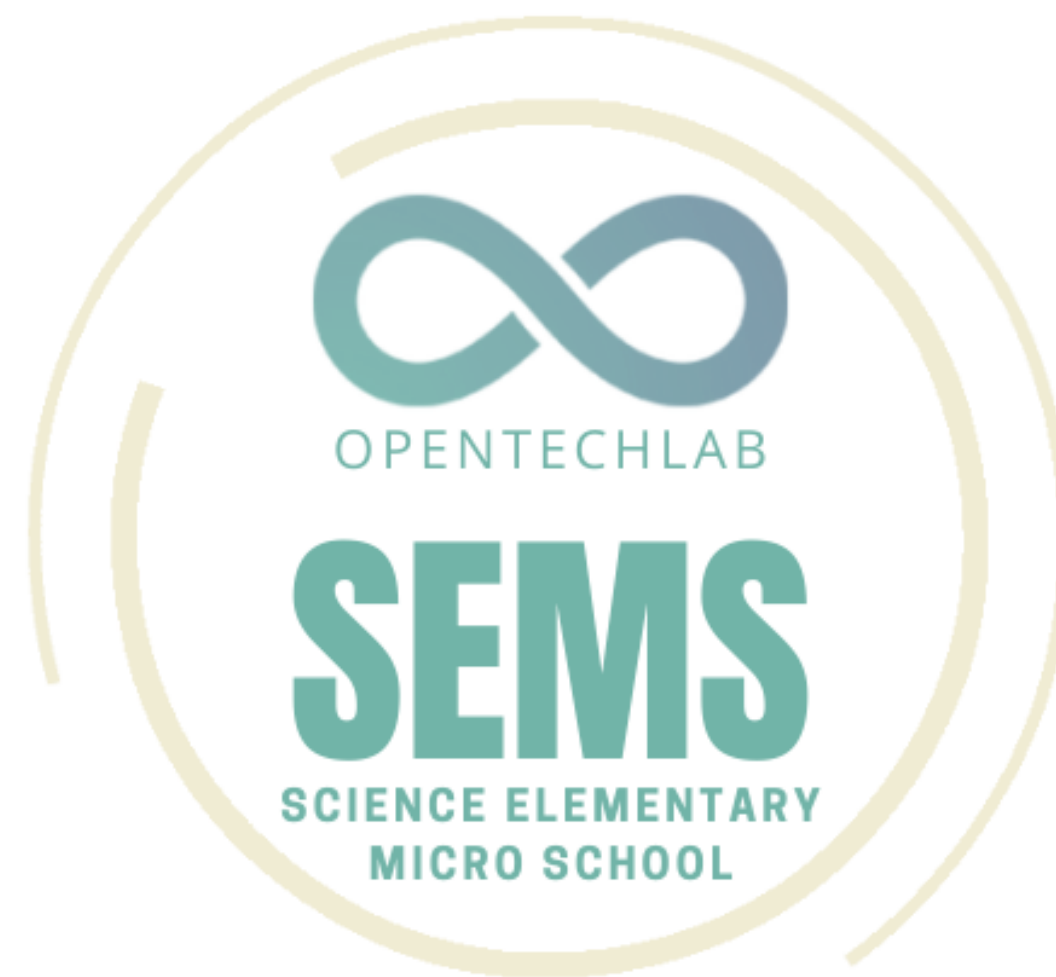


PROSTOR A SOUSTAVA

SOUŘADNIC

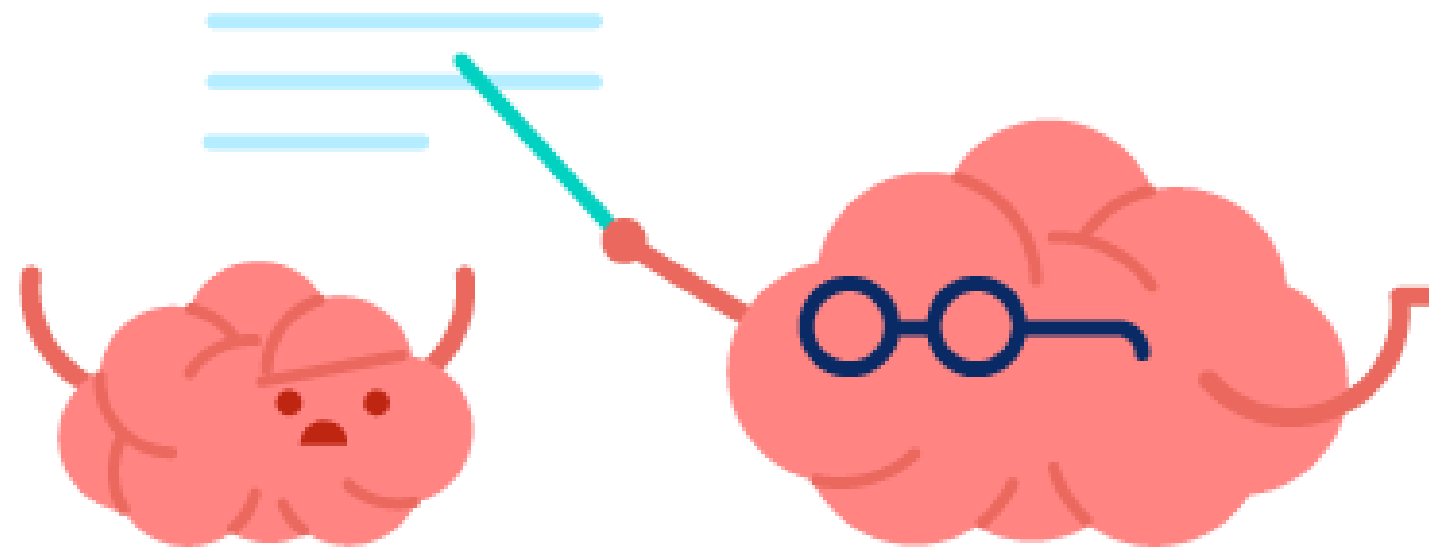
MatFyz lekce 3 - přednáška 1 - (c) 2022



Zásadní otázka na úvod:

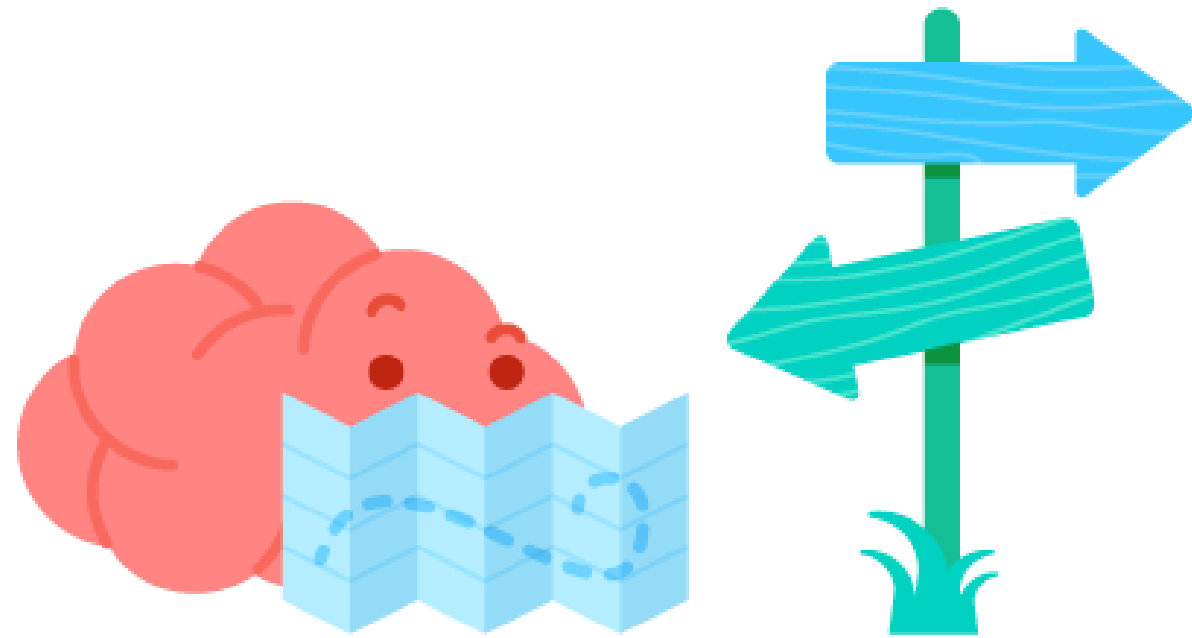
PROČ SE O TOM BAVÍME?

Soustava souřadnic (nebo také souřadnicová soustava či systém souřadnic) umožňuje jednoznačně popsat polohu bodu v prostoru pomocí čísel v podobě souřadnic čili koordinát.



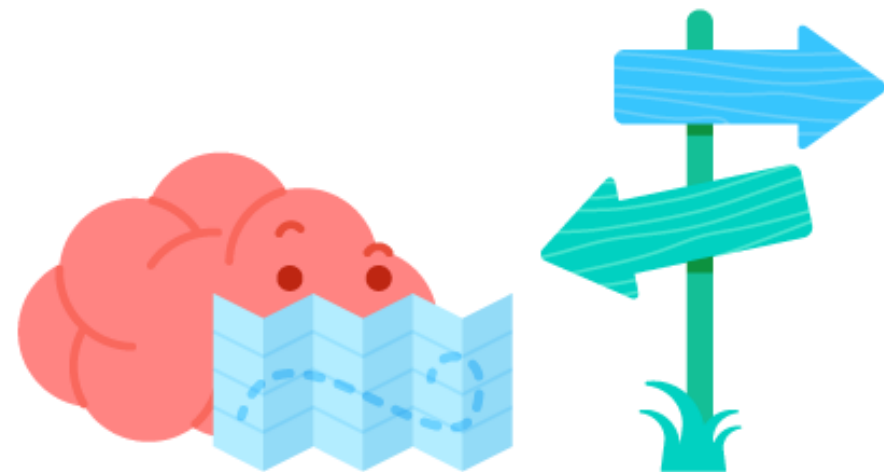
**Geometrické úlohy je tak možno řešit matematickými prostředky,
což je základ analytické geometrie**

Souřadnice jsou, když...



Slovo souřadnice je odvozené od slova seřadit, tedy uspořádat. Systém souřadnic je tedy matematickou (geometrickou) snahou o uspořádání **n-rozměrného** prostoru tak, aby bylo možné popsat nebo označovat polohu libovolného bodu.

Eukleidovský prostor je, když...



Eukleidovský prostor je matematický výraz pro člověku nejbližší, intuitivní představu prostoru.

Eukleidovský prostor je metrickým prostorem, tj. lze v něm zavést veličinu, kterou nazýváme **metrika** čili vzdálenost.

V **eukleidovském prostoru** platí tzv. **eukleidovská metrika**, která umožňuje, že např. kružnice se pak zobrazuje tak, jak jsme zvyklí (při jiné metrice by mohla mít kružnice např. tvar čtverce aj.).

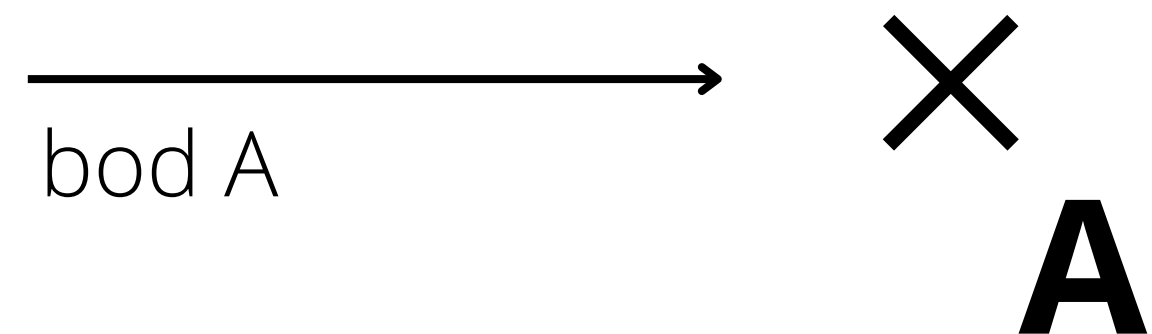
Pro osy rozměrů platí, že jsou vůči sobě všechny kolmé (v pravém úhlu).

Co je to prostor a jeho rozměry

Abychom mohli pohovořit o souřadnicích a souřadnicových soustavách, je třeba se nejprve zabývat pojmem **n-rozměrný prostor**.



Bod - je velmi zvláštním geometrickým útvarem. Můžeme jej označit za 0-rozměrný prostor, ale také jej můžeme ve zvláštních případech označit za ∞ -rozměrný prostor, kde každá prostorová osa má hodnotu nula a kdy je tento prostor bodem, jako objektem, zcela vyplněn.



Co je to prostor a jeho rozměry

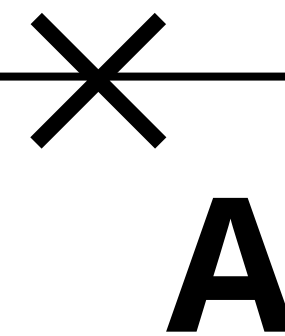
Pokud bodu dáme jeden rozměr, to jest protáhneme-li jej v jedné ose do nekonečna, vzniká **1-rozměrný prostor** - přímka.

Přímka - je jednorozměrným geometrickým útvarem a současně jí můžeme označit za 1-rozměrný prostor.

Přímku můžeme definovat také jako nekonečnou množinu lineárně uspořádaných, vzájemně na sebe navazujících bodů. Nakonec **přímku** můžeme definovat jako kružnici o nekonečně velkém poloměru.



přímka **p**, procházející bodem **A**



Co je to prostor a jeho rozměry

Pokud budeme přímku definovat jako kružnici o nekonečně velkém poloměru, pak takto uvažovaná přímka bude spontánně definovat **rovinu** - tedy **2-rozměrný prostor**.



Rovina je dvojrozměrným geometrickým útwarem, který si lze představit jako dokonale rovnou neomezenou plochu.

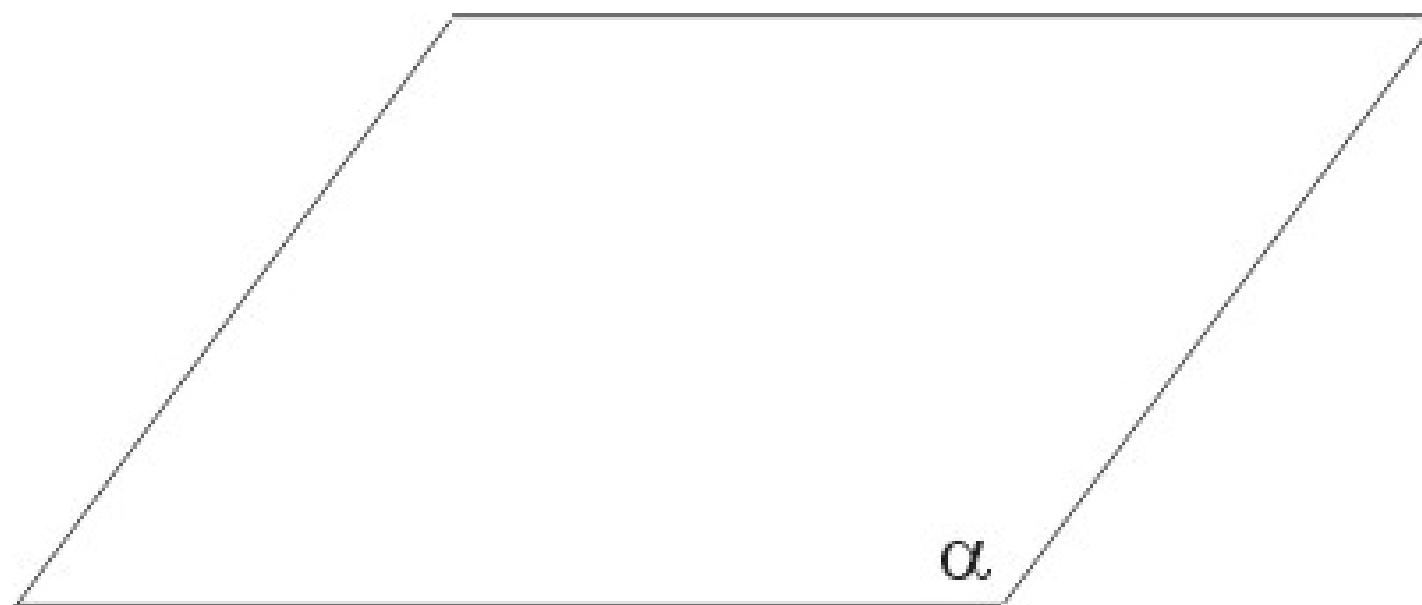
Rovinu lze definovat také jako nekonečnou množinu bodů, rovinně vůči sobě uspořádaných (ve dvou vzájemně na sebe kolmých osách) a těsně na sebe navazujících.

Rovinu lze také definovat jako povrch koule o nekonečně velkém poloměru.

Co je to prostor a jeho rozměry

Rovinu můžeme uvažovat jako plochu, na kterou se kreslí (tzv. nákresna) nebo jí lze znázornit některým rovinným útwarem pomocí geometrických promítání.

Značí se malým řeckým písmenem, zpravidla se začíná písmenem alfa (α).



znázornění plochy **α** geometrickým promítáním

Co je to prostor a jeho rozměry

Pokud budeme uvažovat rovinu jako povrch koule o nekonečně velkém poloměru, pak takto uvažovaná rovina bude spontánně definovat **3-rozměrný** prostor (běžně používáme prostý pojem **prostor**).



Prostor je nekonečný trojrozměrný útvar, kde se mohou vyskytovat celá tělesa.

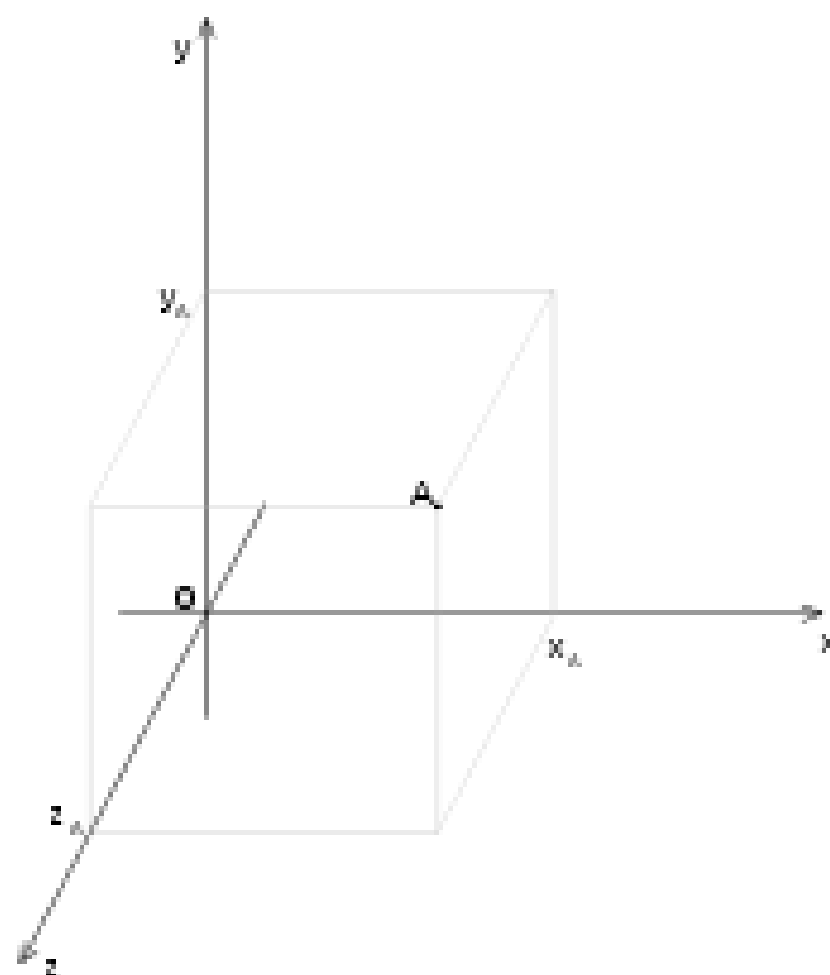
Prostor lze definovat mj. jako nekonečnou množinu bodů, vzájemně na sebe navazujících a prostorově (ve třech vzájemně na sebe kolmých osách) vůči sobě uspořádaných.

Přidáme-li prostoru dynamiku (možnost změn), vzniká

4-rozměrný časoprostor

Co je to prostor a jeho rozměry

Znázornění 3-rozměrného prostoru na nákresně geometrickým promítáním pomocí os soustavy souřadnic (kartézská soustava souřadnic):



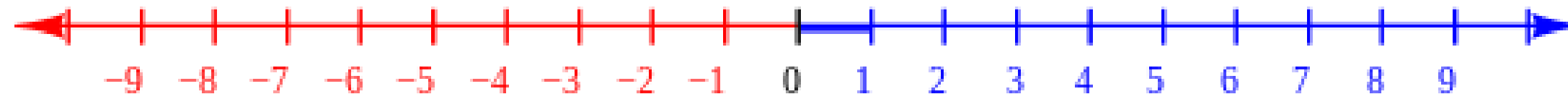
Kartézská soustava souřadnic je soustava souřadnic, u které jsou souřadné osy vzájemně kolmé přímky, které se protínají v jednom bodě – počátku soustavy souřadnic. Jednotka se obvykle volí na všech osách stejně velká.

Kartézská soustava souřadnic

Svůj název dostala po francouzském matematikovi **René Deskartovi** (latinský překlad jména je Cartesius - proto Kartézská).



Nejjednodušší kartézskou soustavou souřadnic je **číselná osa**:

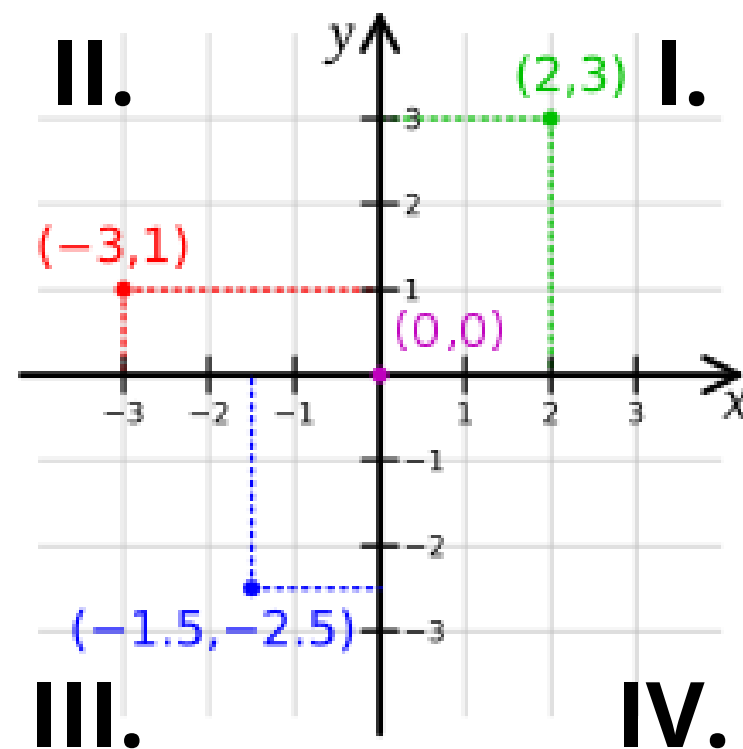


Číselná osa je systém souřadnic pro 1-rozměrný prostor.

Kartézská soustava souřadnic

Ve **2-rozměrném prostoru** je tvoří kartézskou soustavu dvě na sebe kolmé osy, které se protínají v počátku.

Souřadnicemi bodu jsou jeho vzdálenosti od osy y (souřadnice x, vodorovná, **abscisa**) a od osy x (souřadnice y, svislá, **ordináta**)



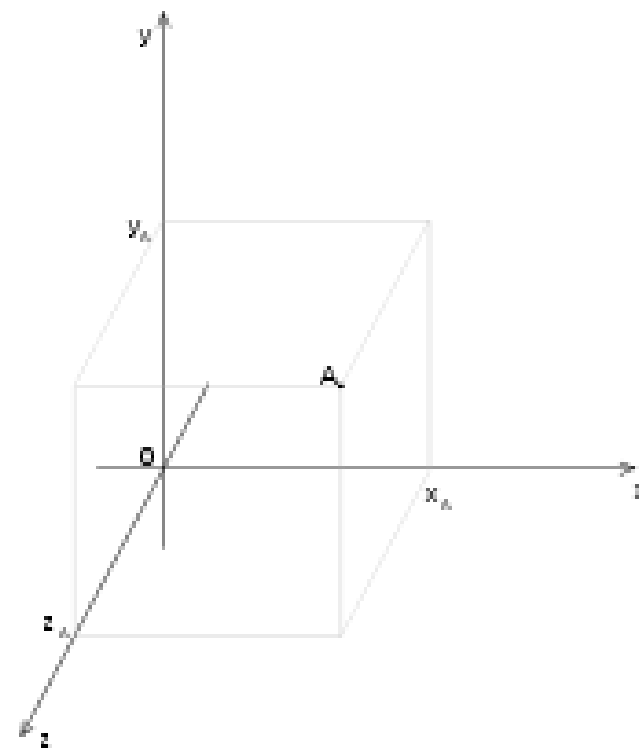
Souřadnice zapisujeme buď **(x, y)** nebo **$A = [x, y]$**

Kvadranty (čtvrtě) pak označujeme římskými čísly protisměru hodinových ručiček - **I.**, **II.**, **III.** a **IV.**

Kartézská soustava souřadnic

Ve **3-rozměrném prostoru** je tvoří kartézskou soustavu tři na sebe kolmé osy, které se protínají v počátku.

Souřadnicemi bodu jsou jeho vzdálenosti od roviny osy y (souřadnice x, **abscisa**), od roviny osy x (souřadnice y, **ordináta**) a od roviny osy z (souřadnice z, **aplikáta**).



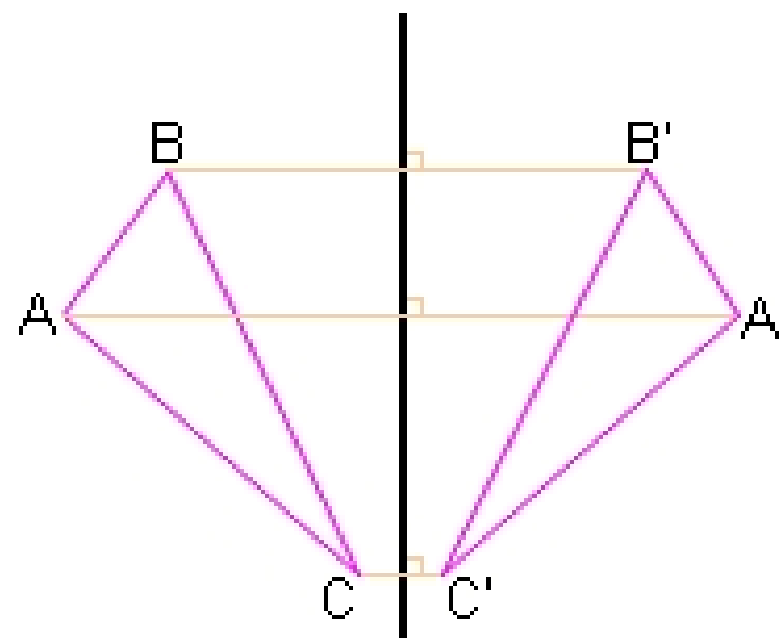
Souřadnice zapisujeme buď **(x, y, z)** nebo **$\mathbf{A} = [x, y, z]$**

Prostor se dělí do osmi částí – **oktantů**. Označení určitého oktantu tvoří znaménka tří souřadnic, např. (+ + +) nebo (− + −).

Osová souměrnost

Osová souměrnost je dána přímkou ***o*** (osou souměrnosti) a přiřazuje každému bodu ***X*** mimo osu takový bod ***X'***, že přímka ***o*** je osou úsečky ***XX'***.

Jinými slovy: obraz má od osy stejnou vzdálenost jako původní bod a spojnice bodů je kolmá na osu. Osová souměrnost zachovává vzdálenosti i úhly, jde tedy o druh shodnosti.



Nejjednodušeji lze osovou souměrnost přirovnat k zrcadlovému obrazu, kde osa souměrnosti je zrcadlem.

Možná témata pro seminář

Prostor a soustavy souřadnic

$$3x = 6; x = \underline{\quad}$$



- Proč je žádoucí, aby v kartézské soustavě souřadnic byla stejná velikost jednotek na všech osách?
- Může být 2-rozměrný prostor v kartézské soustavě souřadnic pouhou projekcí jiné plochy zakřivené ve třech rozměrech?
- Lze z úhlu pohledu objektu v 2-rozměrném prostoru vnímat zakřivení ve třetím rozměru?
- Jak souřadnice určují polohu na Zemi? A je to vůbec ještě kartézská soustava souřadnic?

Možná témata pro seminář

Neeukleidovský prostor



Penroseův trojúhelník (nazývaný také tribar) je známý příklad grafického paradoxu. Ukazuje tři trámy, které jsou vzájemně spojené v pravých úhlech, a přesto tvoří trojúhelník. Tím samozřejmě porušují několik zákonů euklidovské geometrie; mezi jinými i zákon, který říká, že součet úhlů v každém trojúhelníku je 180° .

Lze realizovat pouze změnou topologie na neeukleidovský prostor.

Seminář:

Nejprve se v rámci semináře studenti zabývají zdůvodněním, proč je důležité v kartézské soustavě souřadnic zvolit pro všechny osy stejnou velikost jednotek.

Ve spolupráci s mentorem je nejprve nakreslena kružnice v kartézské soustavě pro 2-rozměrný prostor, ve které mají jednotky na všech osách stejnou velikost. Studenti pozorují, že kružnice má očekávaný tvar.

V dalším případě mentor změní velikost jednotek na ose **y** na polovinu velikosti jednotek na ose **x**. Zobrazení kružnice se v takovém případě opticky mění v elipsu, ačkoli jde stále o kružnici, neboť zůstává v platnosti, že od středu kruhu je ke kružnici stále stejná vzdálenost ve všech úhlech..

Seminář:

Následně mentor opět změní velikost jednotek na ose **y** tak, že velikost další jednotky se rovná polovině velikosti jednotky předchozí, a to až do místa, kde je velikost jednotky $1/4$ původní velikosti jednotek a od tohoto místa je každá další jednotka dvojnásobkem velikosti předchozí. Velikost jednotek na ose **x** zůstala nezměněná.

Tvar kružnice se opět pozmění, tentokrát se její optické zobrazení blíží svým tvarem tvaru oválu se sploštělými vrcholy. Přitom jde stále o matematicky korektní zobrazení kružnice (od středu kruhu je ke kružnici stále stejná vzdálenost ve všech úhlech).

Objevujeme změny topologie z eukleidovského prostoru na neeukleidovský.

Seminář:

Následně mentor promítá studentům videoanimace, ve kterých se představují zdánlivé paradoxy, vyvolané změnou topologie v neeukleidovském prostoru.

Studenti tak vidí, jak jen na základě změn topologie může být objekt uvnitř větší, než zvenku (vzpomeň Tardis a Dr. Who), případně jak lze jít směrem dolů a přitom dojít nahoru nebo jak včelnit do kartézské soustavy pro 2-rozměrný prostor další dva kvadranty.

Mentor ukazuje studentům Penroseův trojúhelník a jak jej lze pomocí změny topologie reálně vytvořit jako 3-rozměrné těleso. Mentor ukazuje trojrozměrný model, zhotovený 3D tiskem.

Seminář:

Dále se studenti zabývali odpovědí otázky, zda je možné, aby byl 2-rozměrný prostor v kartézské soustavě souřadnic pouhou projekcí jiné plochy zakřivené ve třech rozměrech.

Prostřednictvím vyrobené pomůcky kulově zakřivené roviny a zdroje světla studenti objevují, že rovina může opravdu být průmětem jiného, zakřiveného prostoru.

V návaznosti se studenti pod vedením mentora pokoušejí odhalit, zda zakřivení nákresy může hypoteticky vnímat na ní vyvedená úsečka (například zmuchláním nákresny). Docházejí k závěru, že zakřivení roviny ve třetím rozměru nemá na objekty této rovině náležející žádný vliv, vyjma destruktivní změny topologie (roztržení nákresny apod.).

Seminář:

V další části semináře studenti na popud mentora uvažují, jakým způsobem se určuje poloha bodu na Zemi a objevují geodetické souřadnice.

Mentor nabádá studenty, aby si představili, jak by vypadalo určování polohy na Zemi v případě využití kartézské souřadné soustavy pro 3-rozměrný prostor.

Studenti zjišťují zásadní rozdíly mezi oběma souřadnými systémy a vzniká uvědomění nepraktičnosti kartézské soustavy souřadnic, včetně úskalí, která přináší topologie povrchu Země.

Praktická procvičování:

Následně mentor se studenty procvičuje určení koordinátů bodu v souřadné soustavě a naopak, zakreslení polohy bodu podle známých koordinátů. To činí prostřednictvím tabule a kreslení.

Další procvičování látky se děje formou souřadnicových her (piškvorky, lodě apod.).

Nakonec se studenti pokouší o praktickou aplikaci a vytváří program v jazyce JAVA, kde se v okně vykresluje kartézská soustava souřadnic. Není smyslem učit programovat, ale správně nalézt potřebné koordináty a ověřit je jejich vykreslením na obrazovku počítače. Přesto se mentor snaží alespoň ukázat/nastítnit, jak takové programování vypadá.