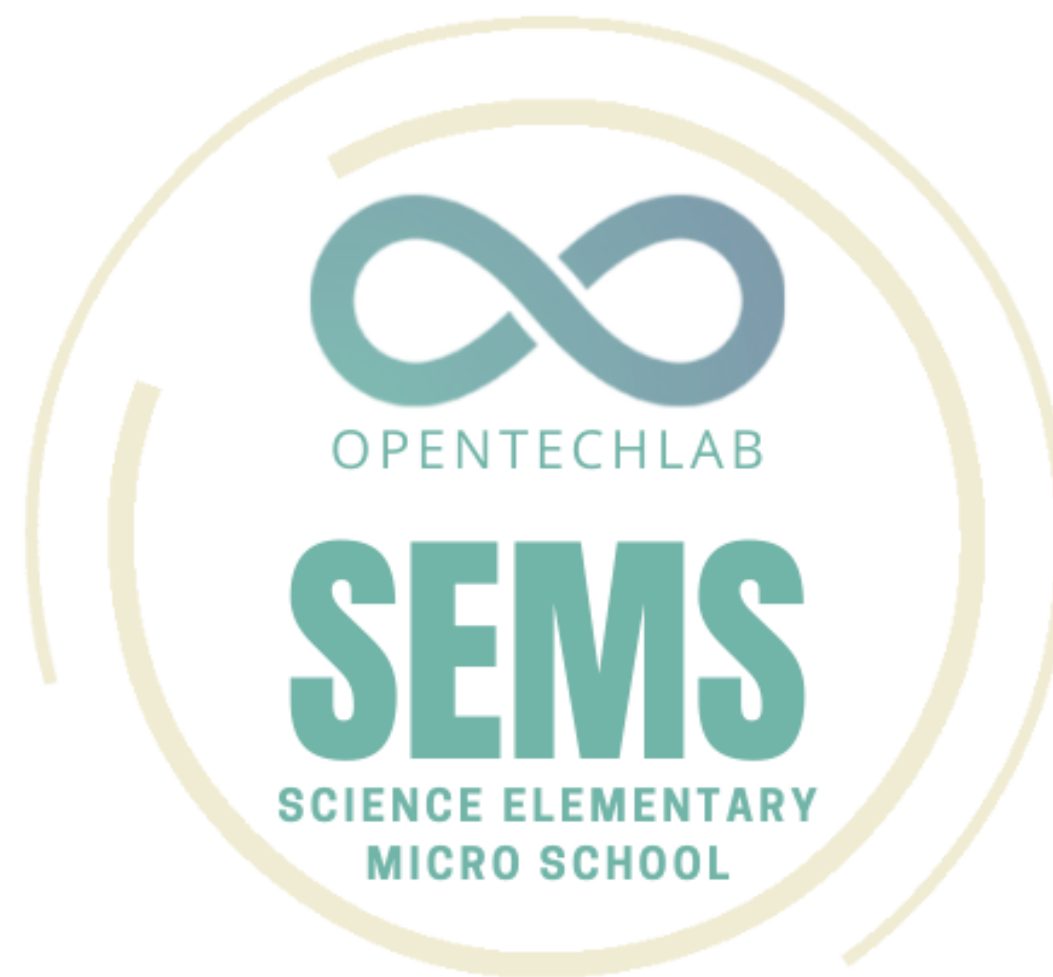


MNOŽINY A KATEGORIZACE DAT

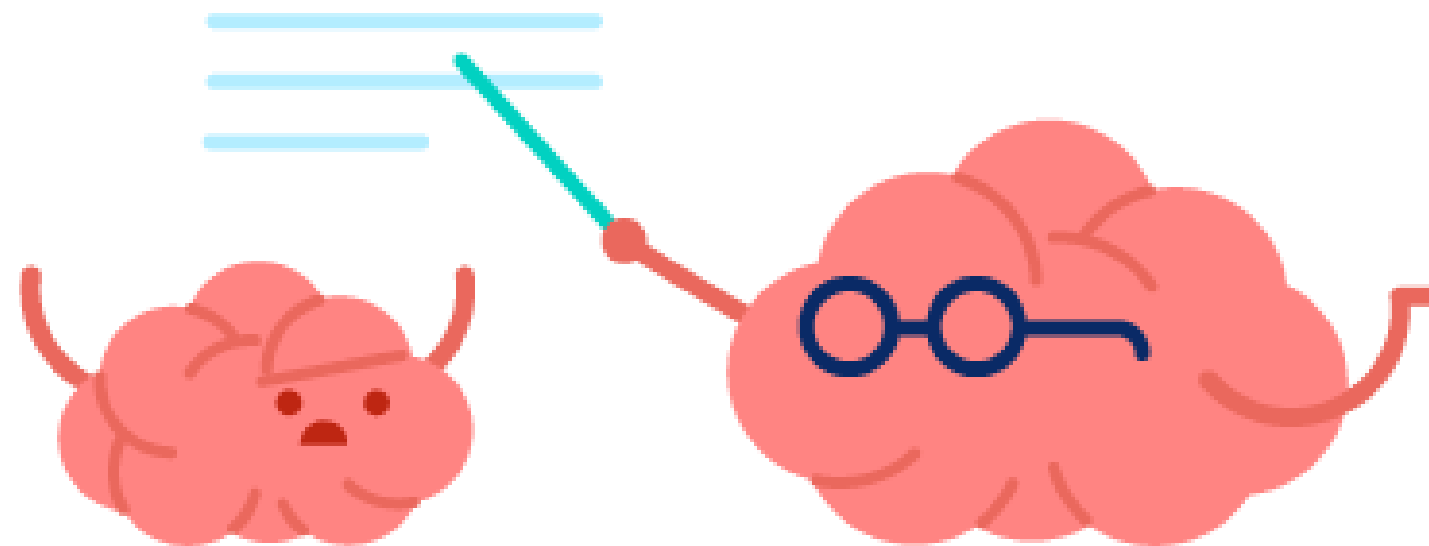
MatFyz lekce 1 - přednáška 2 - (c) 2022



Zásadní otázka na úvod:

PROČ SE O TOM BAVÍME?

Množiny jsou skvělým nástrojem pro kategorizaci dat (třídění dat do skupin). Díky množinám dovedeme data nejen třídit a rozlišovat, ale třeba také srozumitelně pracovat s nekonečny.

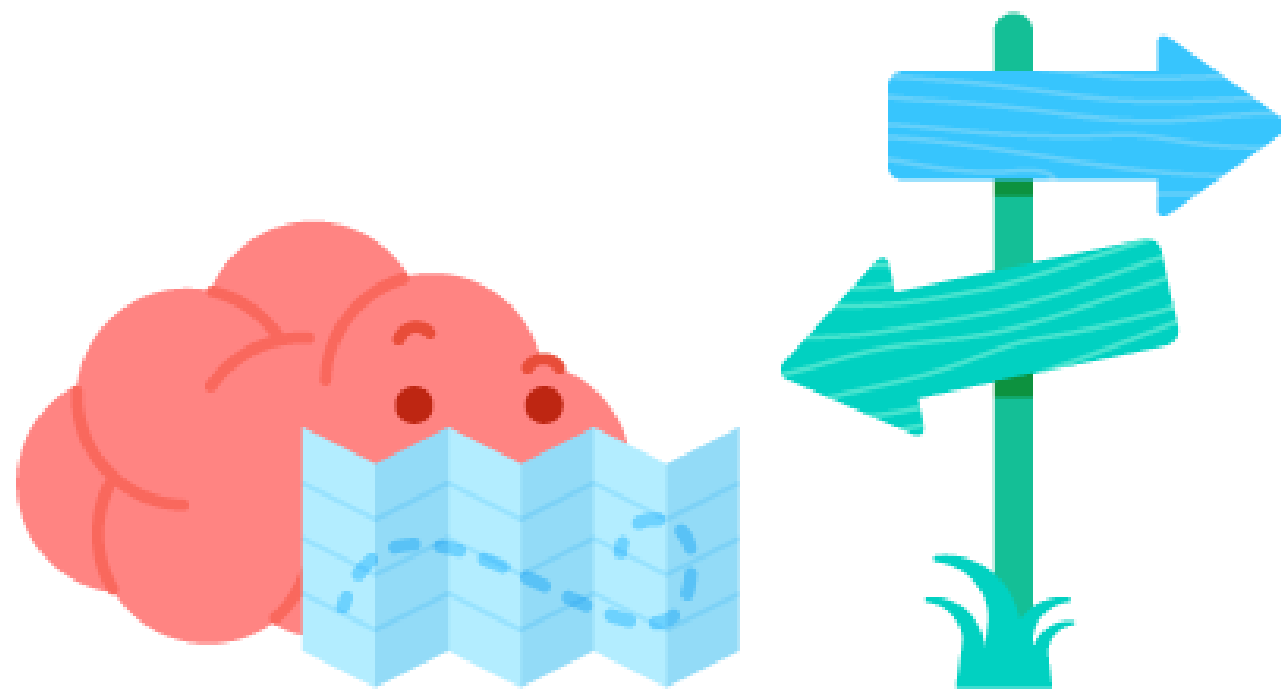


Množiny dovedou velmi dobře objasnit některé vztahy a pojmy...
Napadá Vás které?

CO JSOU TO MNOŽINY

Trocha historie

Za praotce teorie množin je považován matematik, Pražan Bernard Bolzano (1781 - 1848), který se věnoval mimo jiné paradoxům vlastností nekonečných objektů. K jejich řešení velmi obratně využil důkazů množinami.

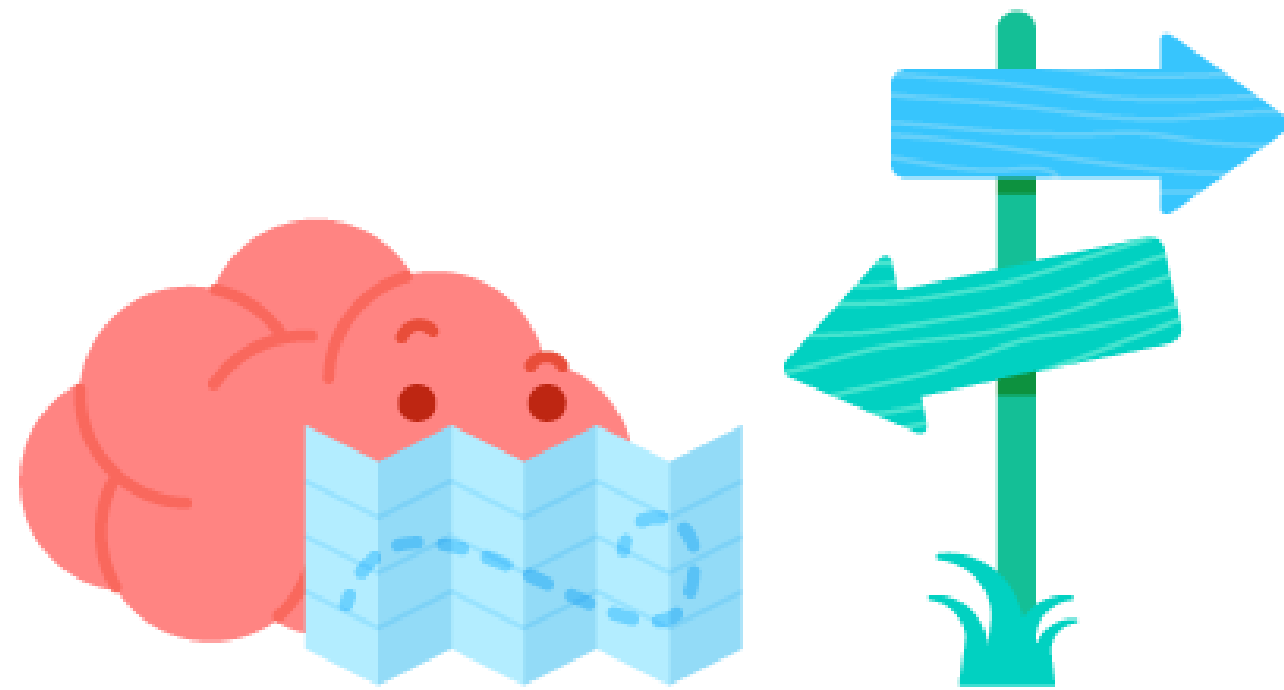


Základy teorie množin jako samostatné matematické disciplíny pak položil o půl století později německý matematik Georg Cantor (1845 - 1918). Ten jako první dokázal platnost věty, že **množina všech podmnožin dané množiny obsahuje více prvků než původní množina.**

To se zdá logické pro konečné množiny, ovšem Cantor dokázal platnost i pro množiny nekonečné. To v důsledku znamenalo důkaz, že existuje více nekonečen, než jedno.

CO JSOU TO MNOŽINY

Na tuto otázku není snadné jednoduše odpovědět. Přesto se o to pokusíme:



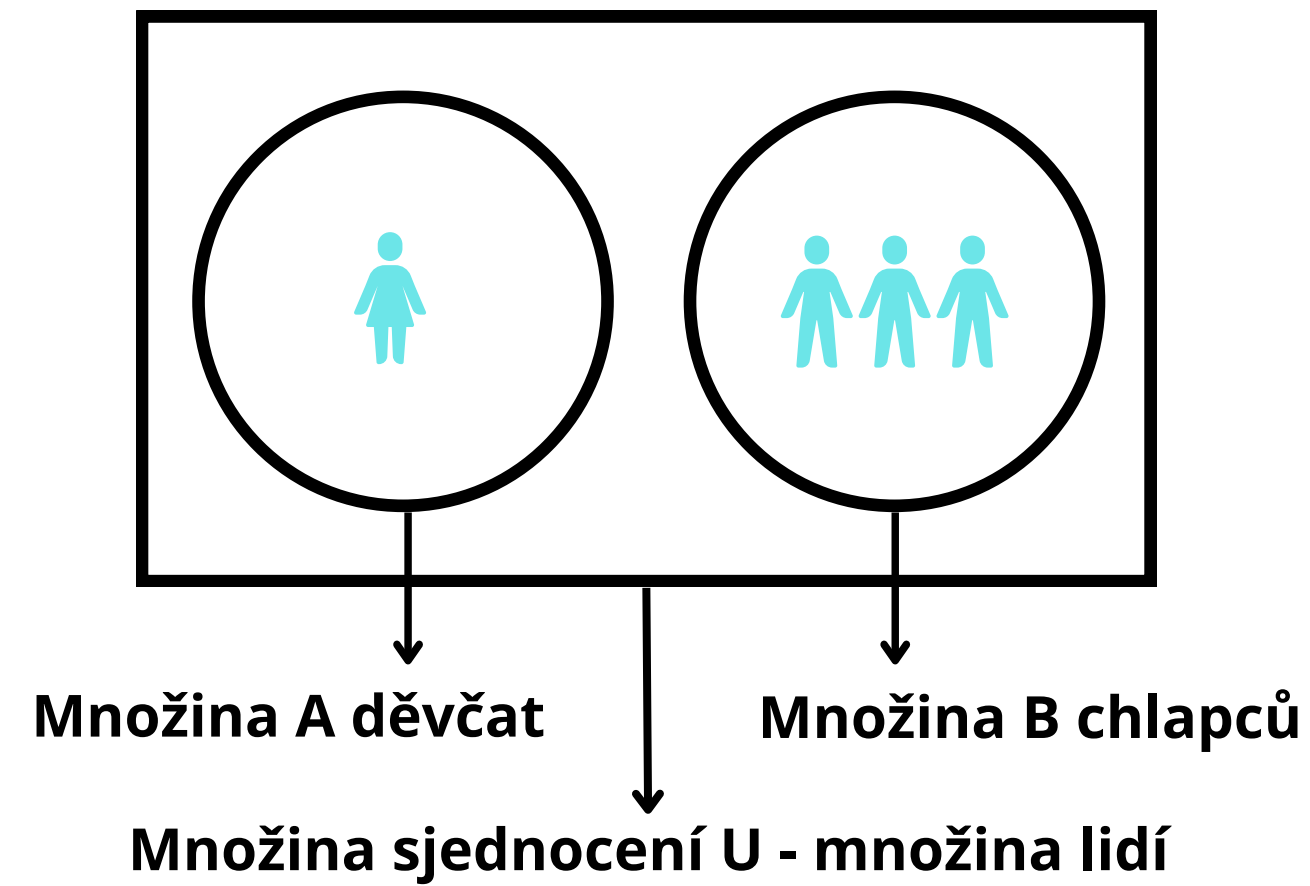
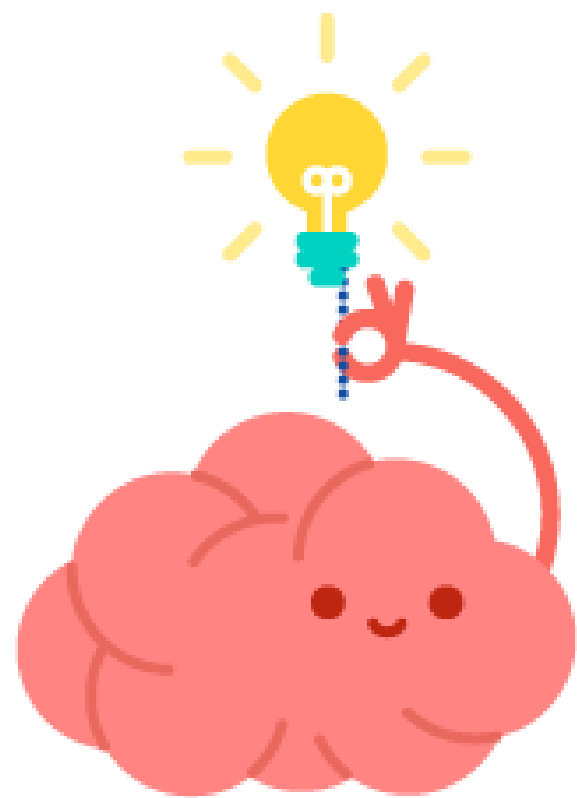
- **Pohled naivní (Cantor):**
 - množina je soubor prvků (objektů) a je svými prvky zcela určena;
- **POZOR:**
 - mezi prvky a množinami není ve skutečnosti rozdíl. Množiny totiž mohou být samy prvky jiných množin.

CO JSOU TO MNOŽINY

Množina děvčat $|A| = 1$ (množina A o mohutnosti 1 prvku)

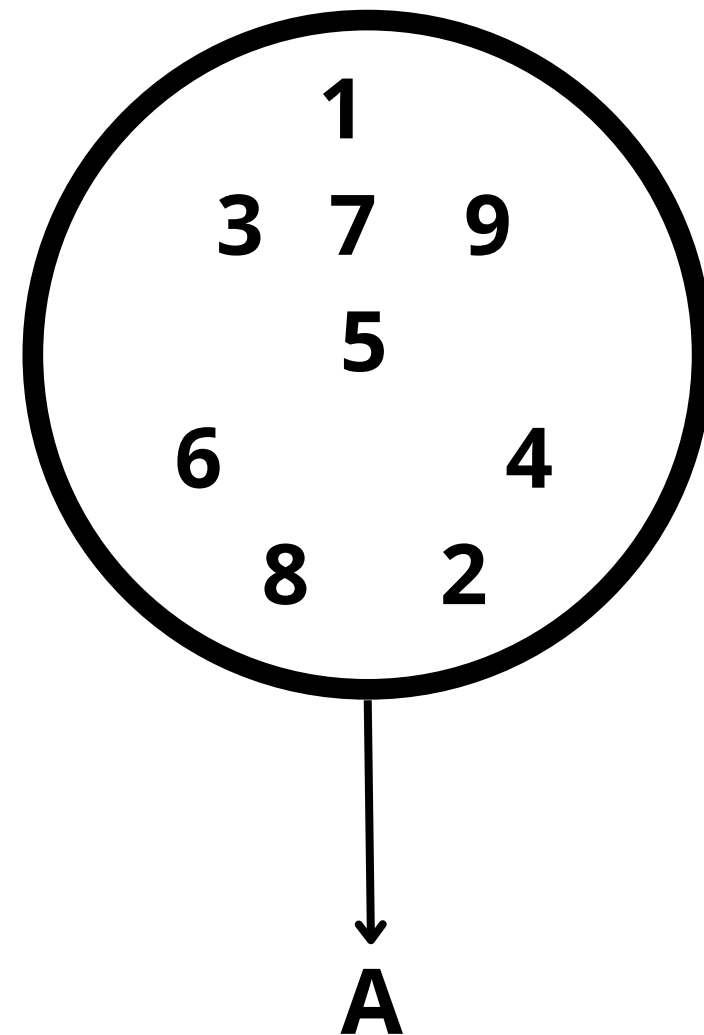
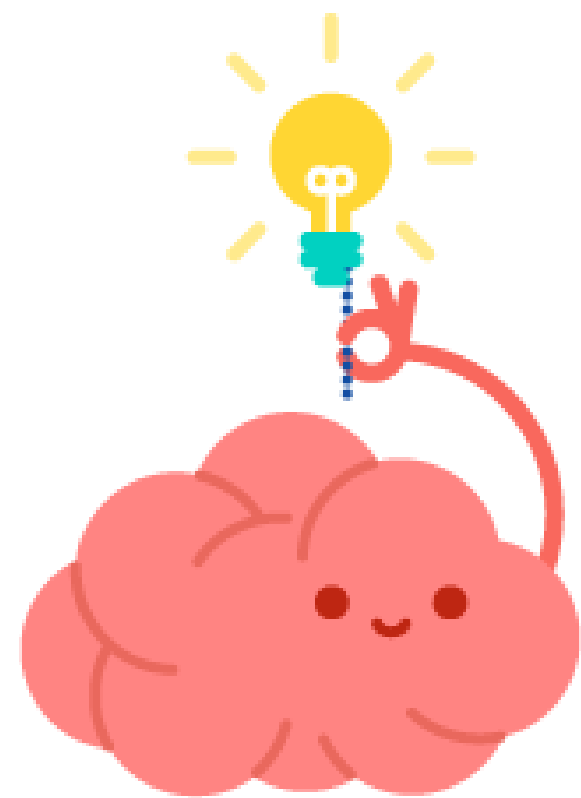
Množina chlapců $|B| = 3$ (množina B o mohutnosti 3 prvků)

Množina sjednocení $|C| = 4$ (množina C o mohutnosti dvou množin, 4 prvků)



OPERACE S MNOŽINAMI

Množiny, podmnožiny, sjednocení



Toto je množina A o mohutnosti devět prvků - čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9.

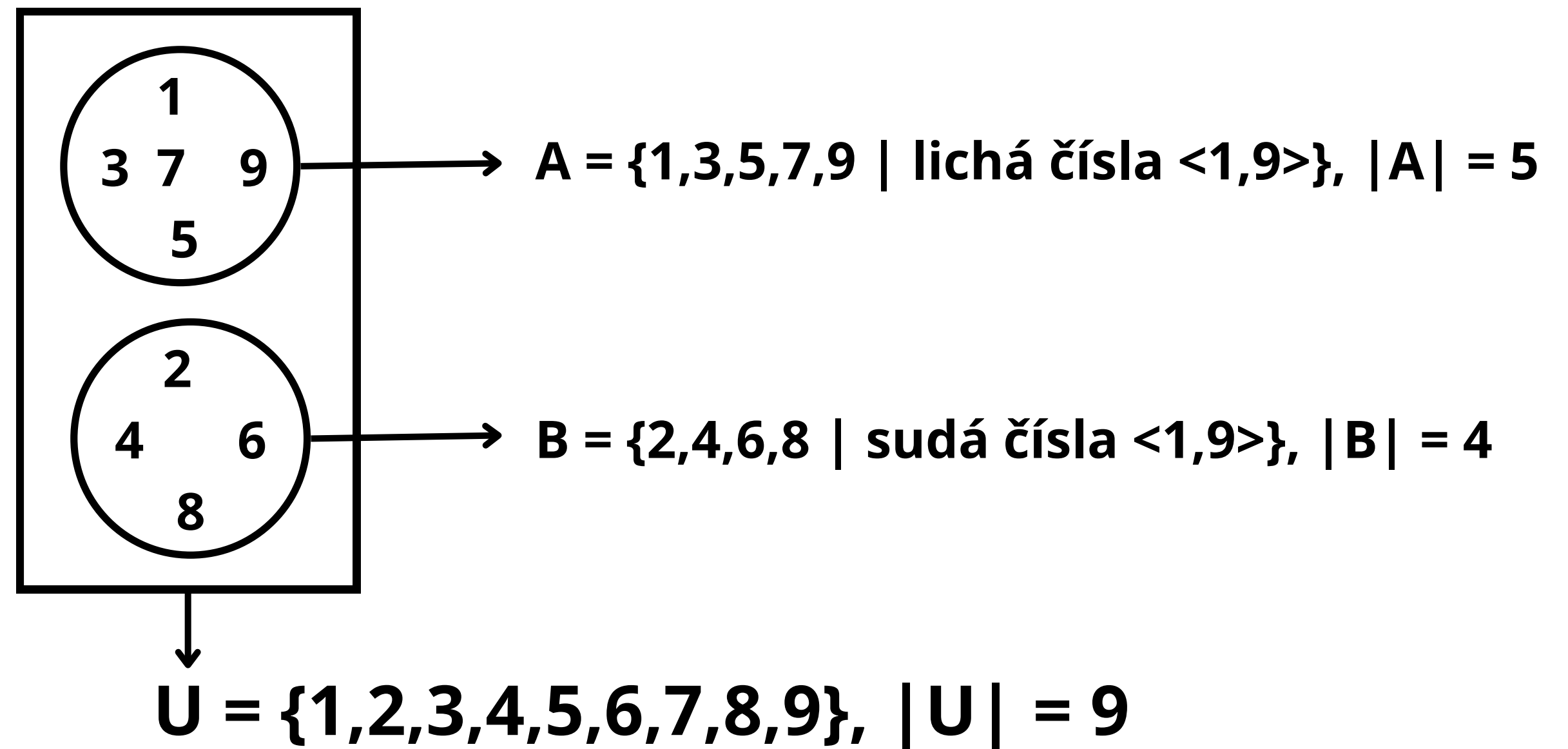
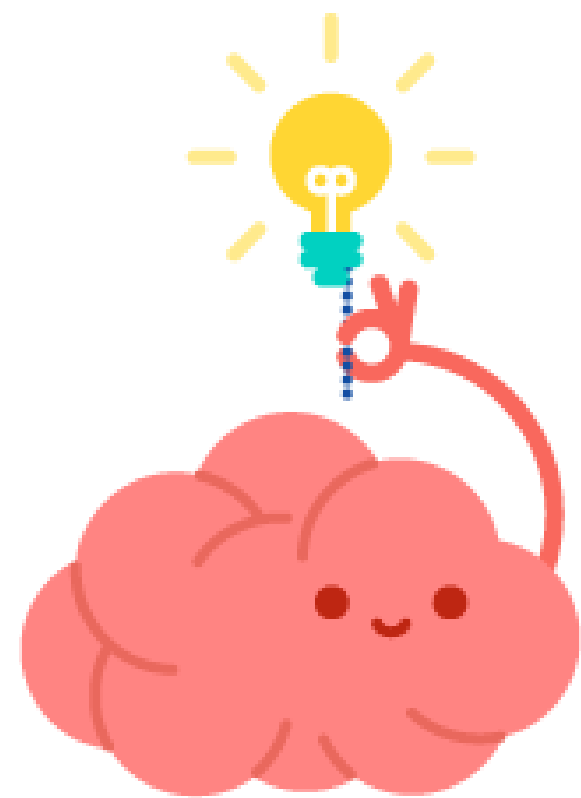
Matematický zápis provedeme takto:

$$|A| = 9$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

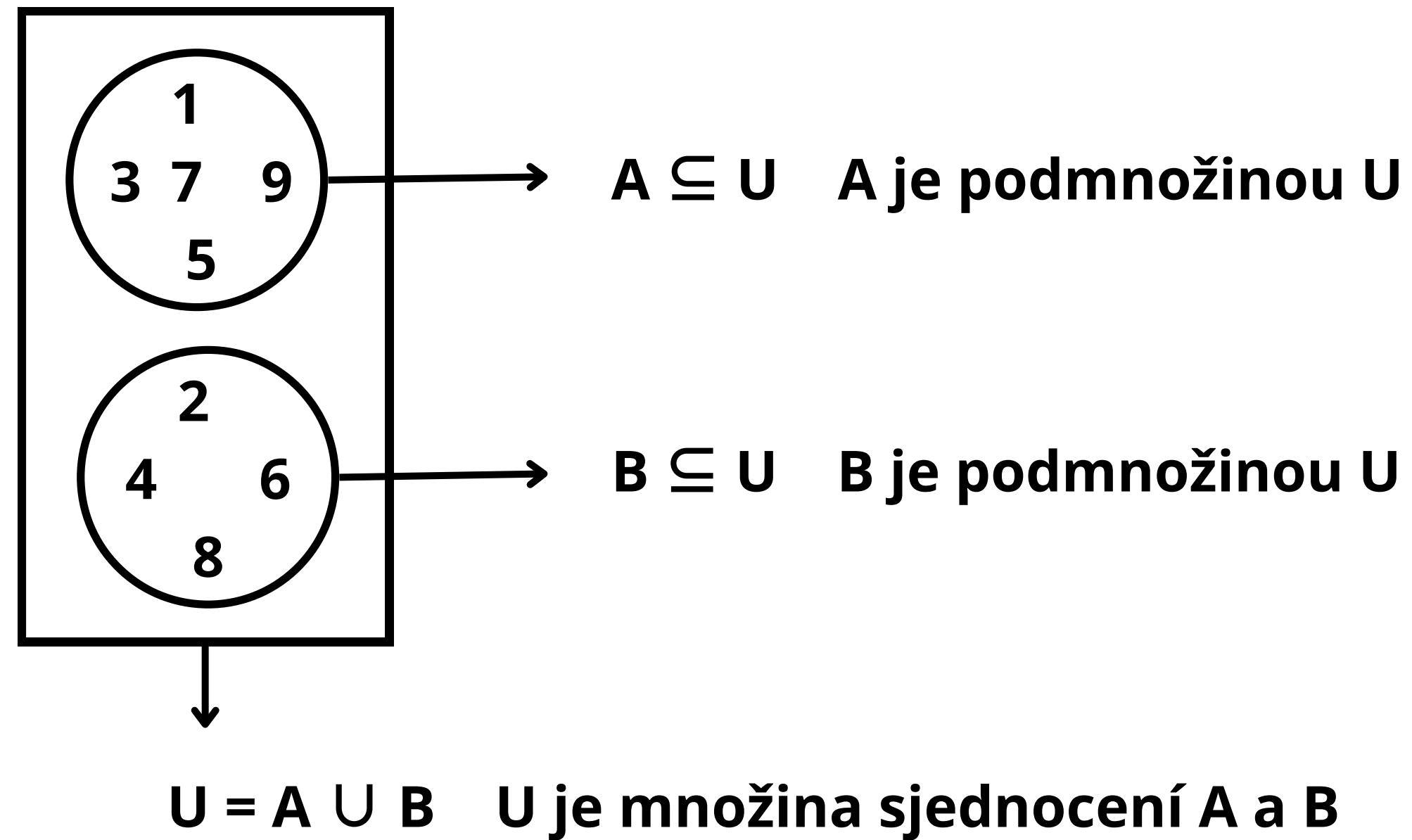
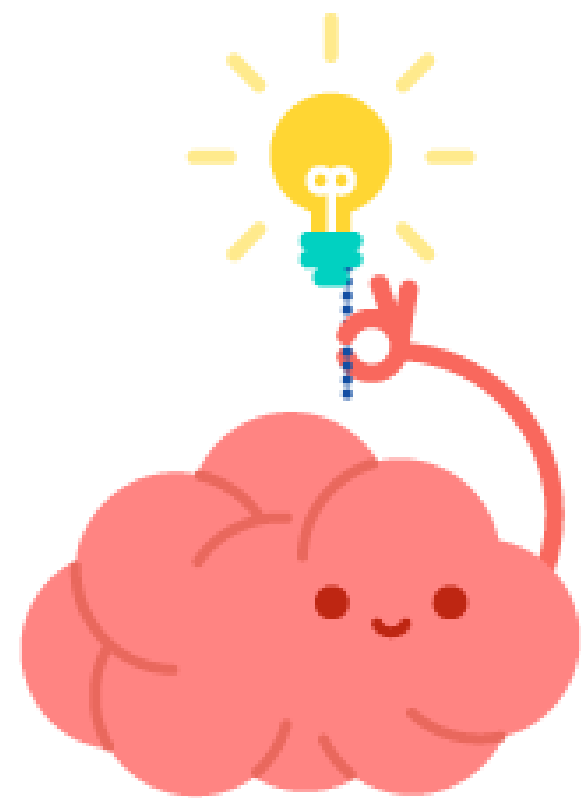
OPERACE S MNOŽINAMI

Množiny, podmnožiny, sjednocení



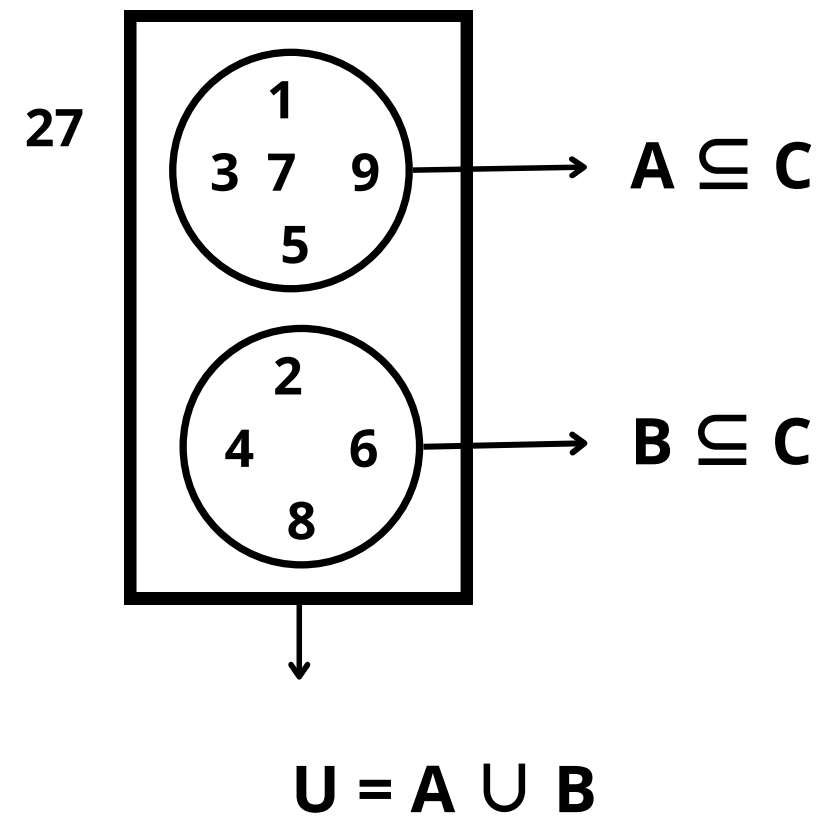
OPERACE S MNOŽINAMI

Množiny, podmnožiny, sjednocení



OPERACE S MNOŽINAMI

Množiny, podmnožiny, sjednocení



O každém prvku je možné říci, zda je prvkem dané množiny a nebo ne, tedy zda dané množině náleží nebo ne. Používáme znaky:

$\in$ - je prvkem množiny (náleží množině)

$\notin$ - není prvkem množiny (nenáleží množině)

$1 \in A, 2 \notin A, 3 \in A, 4 \notin A, 5 \in A,$

$6 \notin A, 7 \in A, 8 \notin A, 9 \in A, 27 \notin A$

$1 \notin B, 2 \in B, 3 \notin B, 4 \in B, 5 \notin B,$

$6 \in B, 7 \notin B, 8 \in B, 9 \notin B, 27 \notin B$

$1 \in U, 2 \in U, 3 \in U, 4 \in U, 5 \in U,$

$6 \in U, 7 \in U, 8 \in U, 9 \in U, 27 \notin U$

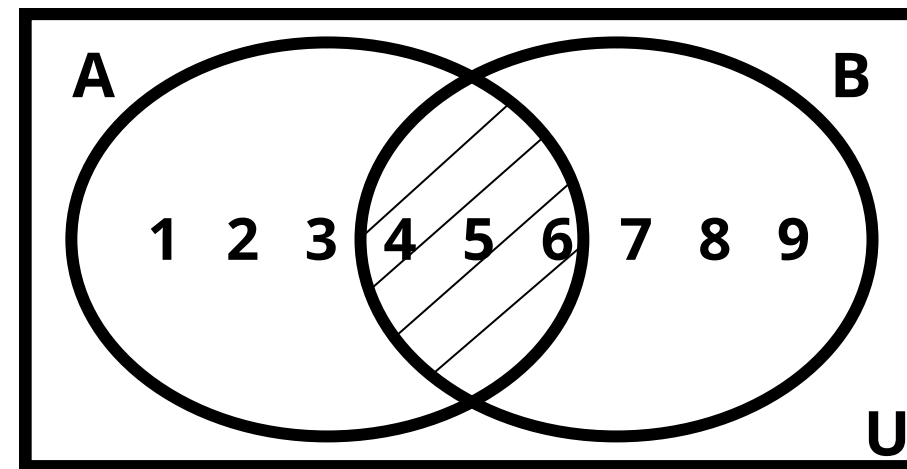
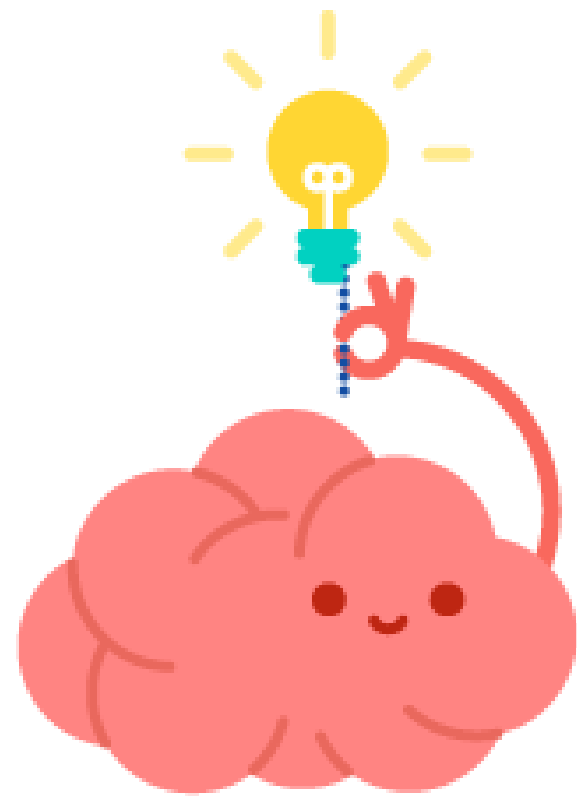
OPERACE S MNOŽINAMI

Průnik množin

Jako průnik dvou a více množin označujeme množinu, která obsahuje pouze ty prvky, které se nacházejí ve všech těchto množinách:

Nechť $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ a $B = \{4,5,6,7,8,9\}$.

Potom $A \cap B = \{4,5,6\}$



Pozor!

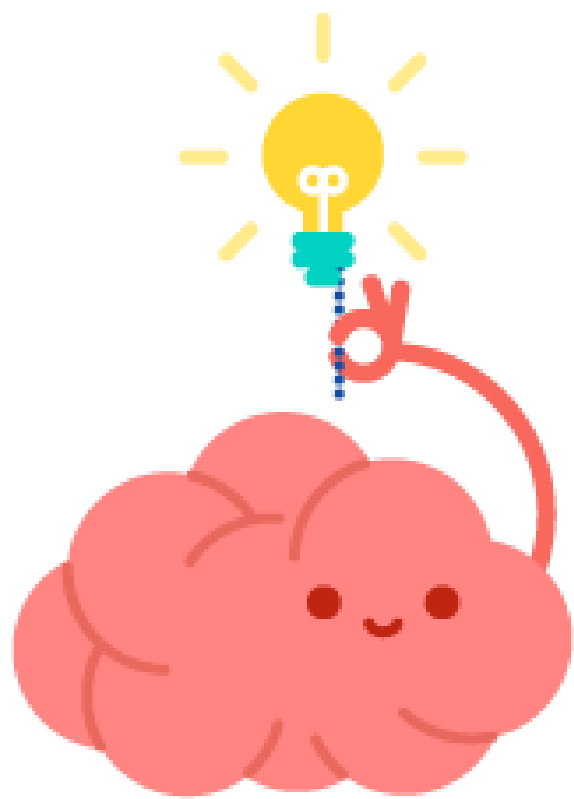
$$|A| = 6, |B| = 6, |U| \neq 12$$

$$|U| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|U| = 6 + 6 - 3 = 9$$

OPERACE S MNOŽINAMI

Značení



Některé běžné množiny se v matematice značí ustáleným způsobem:

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel,

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ je množina celých čísel,

$Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina celých kladných čísel,

Q je množina racionálních čísel (zlomků),

R je množina reálných čísel (číselné osy),

$\emptyset$ je prázdná množina $|\emptyset| = 0$.

Téma pro seminář

Množiny a nekonečna

Myšlenkový experiment:

$$3x = 6; x = \underline{\quad}$$



- Je dán hotel s nekonečným množstvím pokojů.
 - Hotel má všechny pokoje obsazené.
 - Hoteliér má povinnost ubytovat všechny příchozí hosty, přičemž žádný stávající host nesmí hotel opustit.
1. Jak ubytovat jednoho nového hosta?
 2. Jak ubytovat nekonečno nových hostů?
 3. Jak ubytovat nekonečno nekonečen nových hostů?

Seminář:

Studenti se v rámci semináře prakticky (na příkladech) seznamují s naivní teorií množin a axiomatickou teorií množin. Snaží se odhalit rozdíly mezi Cantorovým pohledem na množiny a soudobým axiomatickým pohledem.

Mentor se následně navrací k myšlenkovému experimentu, navrženému na konci přednášky. Ponechává studenty, aby sami hledali a matematicky dokazovali způsoby, jak splnit úlohy 1 až 3 zadání.

Mentor moderuje diskusi tak, aby studenti využívali poznatky teorie množin, pro všechna tvrzení vyžaduje matematicky formulovaný důkaz.

Experiment - provedení:

Nejprve studenti řeší úlohu č. 1 - Jak ubytovat v plně obsazeném hotelu s nekonečně mnoha pokoji **jednoho** dalšího hosta, aniž by stávající hosté museli hotel opustit?

Řešení:

Pro nového hosta uvolníme pokoj č. 1 tak, že host z pokoje 1 půjde do pokoje $1 + 1$, tedy pokoje č. 2, host z pokoje č. 2 půjde do pokoje $2 + 1$, tedy pokoje č. 3, z 3 do 4, ze 4 do 5...

Host z pokoje i půjde do pokoje $i+1$. Pokoj č. 1 dostane nový host.

Experiment - provedení:

Následně studenti řeší úlohu č. 2 - Jak ubytovat v plně obsazeném hotelu s nekonečně mnoha pokoji **nekonečno** dalších hostů, aniž by stávající hosté museli hotel opustit (přijel nekonečný autobus s nekonečně hosty)?

Řešení:

Pro nové hosty uvolníme všechny liché pokoje tak, že host z pokoje 1 půjde do pokoje 2×1 , tedy pokoje č. 2, host z pokoje č. 2 půjde do pokoje 2×2 , tedy pokoje č. 4, z 3 do 2×3 tedy 6, ze 4 do 2×4 tedy 8...

Host z pokoje i půjde do pokoje $i \times 2$. Liché pokoje obdrží noví hosté. Nekonečno může obsahovat více nekonečen.

Experiment - provedení:

Nakonec studenti řeší úlohu č. 3 - Jak ubytovat v plně obsazeném hotelu s nekonečně mnoha pokoji **nekonečno nekonečen** dalších hostů, aniž by stávající hosté museli hotel opustit (přijelo nekonečno nekonečných autobusů s nekonečně hosty)?

Řešení je komplikovanější:

Řešení k uvolnění pokojů využívá, že prvočísel je nekonečně mnoho, že žádná 2^n se nepřekrývá s prvočísly a že ani mocniny prvočísel se nepřekrývají.

Host z pokoje 1 tedy půjde do pokoje 2^1 , host z pokoje 2 půjde do pokoje č. 2^2 , z pokoje 3 do 2^3 , z pokoje i do 2^i .

Následně autobusy očíslováme prvočísky a sedadla autobusu přirozenými čísly. Cestující se ubytují do pokojů i , které se vypočítá jako číslo autobusu (x) umocněné na číslo sedadla (n), tedy $i = x^n$.

Experiment - vyhodnocení:

Experiment ukázal, že existuje více než jedno nekonečno a že nekonečna mohou plně obsahovat jiná nekonečna.

Například:

- Množina všech přirozených čísel je nekonečná.
- Množina všech přirozených lichých čísel je nekonečná a je podmnožinou množiny všech přirozených čísel.
- Množina všech přirozených sudých čísel je nekonečná a je podmnožinou množiny všech přirozených čísel.

Studenti pod vedením mentora vyhledávají analogicky správné příklady množin, podmnožin a průniků množin.

Experiment - vyhodnocení:

Mentor poukazuje, že nekonečné podmnožiny nekonečné množiny sjednocení se mezi sebou mohou a nemusejí překrývat.

Mentor se nakonec zaměřuje na rozdíl mezi průnikem množin a překrýváním množin. Předkládá výroky, u kterých studenti rozlišují, zda jde o podmnožiny nebo průnik množin. Například:

- Každá bílá ponožka je ponožka, ale ne každá ponožka je bílá.
- Někteří muži mají dlouhé vlasy, některé ženy mají vlasy krátké.
- atp.